Т. В. Зыкова

Сибирский федеральный университет,

zykovatv@mail.ru

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА – БАРНСА

Проблема решения алгебраических уравнений остается актуальной до сих пор. В последние два столетия она получила развитие в направлении трансцендентного анализа. В 1921 году Х. Меллин опубликовал работу [1], в которой решение общего алгебраического уравнения было представлено в виде интеграла с параметрами, которые сейчас принято называть интегралами Меллина – Барнса. Такие интегралы есть частный случай обратного преобразования Меллина, когда испытуемая функция представляет собой отношение произведений конечного числа гамма-функций Эйлера от линейных аргументов. Проблема сходимости таких интегралов в многомерном случае затрагивается в работах Х. Меллина, Р. Бушман и Х. Сриваставы, А. Циха, Л. Нильссон [2] и др. Область сходимости интеграла Меллина – Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения, первоначально была указана Х. Меллином (см. [1]). В работе И. Антиповой [3] эта область сходимости была уточнена (расширена). Тем не менее, до сих пор остается актуальной задача описания множеств сходимости интегралов Меллина – Барнса. Результатом данной работы является ответ на вопрос: в каких граничных точках области сходимости интеграл, представляющий решения пентаномиального алгебраического уравнения, остается сходящимся.

Рассмотрим алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами $x_1,\ x_2,\ x_3$:

$$y^n + x_3 y^{n_3} + x_2 y^{n_2} + x_1 y^{n_1} - 1 = 0, \quad n > n_3 > \cdots > n_1 \geqslant 1. \quad (1)$$

Следуя результату Х. Меллина [1], приведем интегральную формулу для μ-й степени ($\mu > 0$) ветви решения $y(x)$ ($y(0) = 1$) :

$$\frac{1}{(2\pi i)^3} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^3} \frac{\mu}{n} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{3} \Gamma(z_\nu) \Gamma\left(\frac{\mu}{n} - \frac{1}{n}\langle \alpha, z \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{n}\langle \beta, z \rangle + 1\right)} x^{-z} dz, \tag{2}$$

здесь $\alpha = (n_1, n_2, n_3)$, $\beta = nI - \alpha$, $I = (1,1,1)$. Интегрирование в (2) ведется по мнимому подпространству $\gamma + \mathrm{i}\mathbb{R}^3$, вектор γ фиксирован из симплекса

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}^3_+ : \langle \alpha, u \rangle < \mu \right\}.$$

Из результата работы [3] известно, что область сходимости интеграла (2) есть *секториальная* область $S_\Theta = \mathrm{Arg}^{-1}(\Theta)$ с основанием

$$\Theta = \Big\{ \theta \in \mathbb{R}^3 : |\theta_\nu| < \frac{\pi n_\nu}{n},\ \nu \in J,\ |n_k \theta_j - n_j \theta_k| < \pi n_k, \\ k < j,\ k, j \in J \Big\}, \quad (3)$$

где J — набор индексов $\{1, 2, 3\}$, а отображение

$$\mathrm{Arg} : (\mathbb{C} \setminus \{0\})^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (\theta_1, \theta_2, \theta_3),$$

где через $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ обозначен вектор $(\arg x_1, \arg x_2, \arg x_3)$.

При условии $n \geqslant 2n_3$ неравенства (3) определяют внутренность параллелепипеда. Если $n < 2n_3$, $n \geqslant 2n_2$, то неравенства (3) представляют выпуклый десятигранник, а в самом общем случае, когда $n < 2n_3$, $n < 2n_2$, — двенадцатигранник с восемнадцатью вершинами (см. рис.).

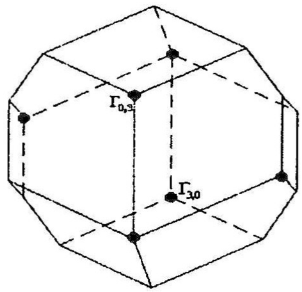

Рис. Двенадцатигранник $\bar{\Theta}$ $(n < 2n_3,\ n < 2n_2)$

Введем обозначения для подмножества вершин $\bar{\Theta}$, выделенных на рис. 1:

$$\mathcal{K}_{n_3} = \left\{ \left(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n}, \frac{\pi n_3}{n} \right), \left(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n}, -\frac{\pi n_3}{n} \right) \right\},$$
$$\mathcal{K}_{n_2} = \left\{ \left(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n}, \pi \left(\frac{n_3}{n} - 1 \right) \right), \left(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n}, \pi \left(1 - \frac{n_3}{n} \right) \right) \right\},$$
$$\mathcal{K}_{n_1} = \left\{ \left(\frac{\pi n_1}{n}, \pi \left(\frac{n_2}{n} - 1 \right), \pi \left(\frac{n_3}{n} - 1 \right) \right), \right.$$
$$\left. \left(-\frac{\pi n_1}{n}, \pi \left(1 - \frac{n_2}{n} \right), \pi \left(1 - \frac{n_3}{n} \right) \right) \right\}.$$

Справедлива

Теорема. *Для любого* $\gamma \in U$ *интеграл* (2) *сходится на множестве:*

а) $\operatorname{Arg}^{-1}\left(\bar{\Theta} \backslash \mathcal{K}_{n_3}\right)$ *при* $n > 2n_3$;

б) $\operatorname{Arg}^{-1}\left(\bar{\Theta} \backslash \left(\mathcal{K}_{n_3} \cup \mathcal{K}_{n_2}\right)\right)$ *при* $n \leqslant 2n_3,\ n > 2n_2$;

в) $\operatorname{Arg}^{-1}\left(\bar{\Theta} \backslash \left(\mathcal{K}_{n_3} \cup \mathcal{K}_{n_2} \cup \mathcal{K}_{n_1}\right)\right)$ *при* $n < 2n_3,\ n \leqslant 2n_2$.

Поясним технику метода доказательства для случая $n > 2n_3$. Обозначим

$$u_\nu = \operatorname{Re} z_\nu, \quad v_\nu = \operatorname{Im} z_\nu, \quad \nu \in J.$$

Используя оценку для гамма-функции, вытекающую из формулы Стирлинга, оценим модуль подынтегральной функции в (2) выражением:

$$\mathrm{const}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{3}\left(|v_\nu|+1\right)^{u_\nu-\frac{1}{2}}\left(\left|\frac{1}{n}\langle\alpha,v\rangle\right|+1\right)^{-\frac{1}{n}\langle\alpha,u\rangle+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{n}\left|\langle\beta,v\rangle\right|+1\right)^{\frac{1}{n}\langle\beta,u\rangle+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left\{\langle v,\theta\rangle-\frac{\pi}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{3}|v_\nu|+\frac{1}{n}\left|\langle\alpha,v\rangle\right|-\frac{1}{n}\left|\langle\beta,v\rangle\right|\right)\right\}. \tag{4}$$

Рассмотрим грань размерности $k=s+t$ $(0\leqslant s,\ t\leqslant 3)$ вида

$$\Gamma_{s,t}=\left\{\theta\in\mathbb{R}^3:\theta_\nu=\frac{\pi n_\nu}{n},\nu\in J_t,\theta_\nu=-\frac{\pi n_\nu}{n},\nu\in J_s\right\},$$

где наборы J_s, J_t — непересекающиеся подмножества множества J. Соответственно введем обозначения:

$$\overline{J_t}:=J\backslash J_t,\quad \overline{J_s}:=J\backslash J_s,\quad \theta_{\overline{J_t}\cup\overline{J_s}}:=(\theta_\nu)_{\nu\in\overline{J_t}\cap\overline{J_s}},$$

$$v_{J_t}:=(v_\nu)_{\nu\in J_t},\quad v_{J_s}:=(v_\nu)_{\nu\in J_s},\quad v_{\overline{J_t}\cap\overline{J_s}}:=(v_\nu)_{\nu\in\overline{J_t}\cap\overline{J_s}},$$

α_{J_s}, α_{J_t} — поднаборы набора α. Аргумент экспоненциального множителя в (4) при фиксированном $\theta\in\Gamma_{s,t}$ имеет вид

$$\langle\theta_{\overline{J_t}\cap\overline{J_s}},v_{\overline{J_t}\cap\overline{J_s}}\rangle+\frac{\pi}{n}\langle\alpha_{J_t},v_{J_t}\rangle-\frac{\pi}{n}\langle\alpha_{J_s},v_{J_s}\rangle-$$
$$-\frac{\pi}{2}\left(\sum_{j=1}^{p}|v_j|+\frac{1}{n}|\langle\alpha,v\rangle|-\frac{1}{n}|\langle\beta,v\rangle|\right) \tag{5}$$

и является величиной неположительной. В том случае, когда (5) — величина отрицательная, экспонента убывает и никакой степенной множитель в (4) не может повлиять на сходимость интеграла (2). Найдем направления $v\in\mathbb{R}^3$, на которых (5) при фиксированном $\theta\in\Gamma_{s,t}$ обращается в нуль. Это происходит в полиэдральных конусах: $V_t^+=\left\{v_{\overline{J_t}}=0,v_{J_t}\geqslant 0\right\}$, $V_s^-=\left\{v_{\overline{J_s}}=0,v_{J_s}\leqslant 0\right\}$. Интегралы от функции (4) по окрестностям полиэдральных конусов V_t^+, V_s^- расходятся лишь в случаях пар $(t = 3,\ s = 0)$, $(s = 3,\ t = 0)$, которые соответствуют точкам множества $\mathcal{K}_{n_3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mellin H. *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* // C.R. Acad. Sci., Paris Sér. – 1921. – V. 172. – P. 658-661.

2. Nilsson L. *Amoebas, discriminants, and hypergeometric functions* // Doctoral thesis. – Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009.

3. Антипова И. А. *Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений* // Матем. сб. – 2007. – Т. 198. – № 4. – С. 3-20.

Н. А. Ибрагимова

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, ibnailya@yandex.ru

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть $\mathbb{E}^+{}_p$ — полупространство $x_p > 0$ p-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}_p$ точек $x = (x', x_p)$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ D — конечная область в $\mathbb{E}^+{}_p$, ограниченная открытой частью Γ_0 гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью Γ.

Рассмотрим в $\mathbb{E}^+{}_p$ B-эллиптическую систему уравнений вида

$$L_B[u] = \Delta_B u + Au = 0, \tag{1}$$